Electromagnétisme PEIP 2 Examen 12 janvier 2022
Choix de 4 Exercices sur 5 / Durée de l'épreuve 2 heures.
Autorisé : Formulaire A4 manuscrit / Calculettes standards
Vous pouvez rendre 5 exercices, on garde la meilleure de 4/5

1. (5pts) **Electrostatique :**

   On considère un système de 3 charges $q, q, (-2q)$ respectivement placées aux positions : $P_1 = (a\sqrt{3}, a)$, $P_2 = (a\sqrt{3}, -a)$ et $P_3 = (0,0)$ (Figure 1.(a)) :

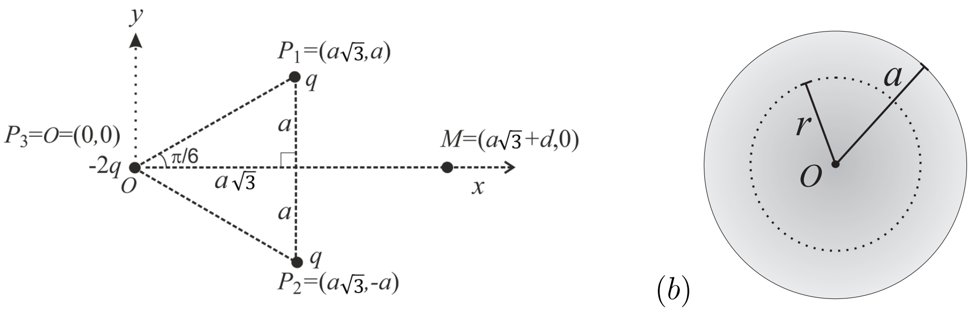
(a) 

Figure 1: (a) Système de 3 charges : (b) sphère de densité variable.

   a) Trouver le champ électrique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(M)$ à la position, M, produit uniquement par la charge q à la position $P_1 = (a\sqrt{3}, a)$ (en fonction de a, d et ϵ_0).

   Solution :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}} = -a\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y + d\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x$$
$$P_1M = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}}\right| = \sqrt{a^2 + d^2}$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(M) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}}}{P_1M^3} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-a\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y + d\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x}{(a^2+d^2)^{3/2}}\ [\text{V.m}^{-1}]\ .$$

   b) Trouver la force sur une particule de charge q, $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{\to q}(M)$ à la position, M, produit par l'ensemble des trois charges (en fonction de a, d et ϵ_0).

   Solution : Par symétrie avec $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(M)$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2(M) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y + d\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x}{(a^2+d^2)^{3/2}}\ [\text{V.m}^{-1}]\ ,$$

   et ensuite nous ajoutons,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_3(M) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x}{\left(a\sqrt{3}+d\right)^2}\ [\text{V.m}^{-1}]\ .$$

La force sur la particule q est donc:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{\to q}(M) &= q\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{tot}}(M) = q\left[\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(M) + \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2(M) + \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_3(M)\right] \\ &= \frac{2Qq}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{d}{(a^2+d^2)^{3/2}} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}+d\right)^2}\right]\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x \\ &= \frac{2Qq}{4\pi\epsilon_0 d^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{a\sqrt{3}}{d}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\left(\frac{a}{d}\right)^2\right)^{3/2}}\right]\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x \text{ [N]} .\end{aligned}$$

c) Trouver le moment dipolaire, $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$, du système des trois charges (A.N. $a = 1$cm, $q = 50\mu$C).

Solution :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \sum_i q_i\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_i = q\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_1 + q\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_2 = \left(qa\sqrt{3}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + qa\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y\right) + \left(qa\sqrt{3}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + qa\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y\right)$$

$$= 2qa\sqrt{3}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x = p\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x \Longrightarrow p = 2qa\sqrt{3}$$

$$\text{A.N.} p = 2\times 50\times 10^{-6}\times\sqrt{3} \simeq 1,73\times 10^{-4}\text{[C.m]} .$$

d) Trouver l'énergie électrique, $\mathscr{E}_e$, du système des trois charges. (A.N. $a = 1$cm, $q = 50\mu$C).

Solution :

$$r_{13} = r_{23} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_1\right| = \sqrt{3a^2+a^2} = 2a \quad , \quad r_{12} = 2a$$

$$\mathscr{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\text{paires}}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{2q^2}{r_{13}} - \frac{2q^2}{r_{23}} + \frac{q^2}{r_{12}}\right) = \frac{q^2}{4\pi a\epsilon_0}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\text{A.N. } \mathscr{E}_e = \frac{250\times 10^{-12}\times 9\times 10^9}{2\times 10^{-2}} = -112.5\,\text{[J]} .$$

2. (5pts) On considère un système à symétrie sphérique, avec un potentiel électrique, $V_{r\leq a}(r) = -V_1\frac{r^3}{a^3} + V_0$ dans la région $r \leq a$. On suppose qu'il n'y a pas de charge surfacique en $r = a$.

   a) Trouver le champ électrique dans la région $r \leq a$.
   Solution :

$$\vec{\boldsymbol{E}}_1(M) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}V_{r\leq a}(r) = V_1\frac{3r^2}{a^3}\vec{\boldsymbol{u}}_r \equiv E_r(r)\vec{\boldsymbol{u}}_r\ [\mathrm{V.m}^{-1}] \qquad r \leq a\ .$$

   b) Quelle est la charge totale, Q, contenue dans la région $r \leq a$? (fonction de a et V_1)
   Solution :

$$\begin{aligned}\oiint_{r=a} \vec{\boldsymbol{E}}_1(M)\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} &= \oiint_{r=a} V_1\frac{3a^2}{a^3}\vec{\boldsymbol{u}}_r\cdot\vec{\boldsymbol{u}}_r dS = V_1\frac{3a^2}{a^3}\oiint_{r=a} dS \\ &= V_1\frac{3a^2}{a^3}4\pi a^2 = V_1 12\pi a = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow Q = V_1 12\pi\epsilon_0 a\ [\mathrm{V.m}^{-1}]\ .\end{aligned}$$

   c) Déterminer la densité de charge électrique $\rho(r)$ dans la région $r \leq a$ (Indice : faire appel à une des formules suivant cet exercice). **Solution :**

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{E}} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2E_r\right]}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2V_1\frac{3r^2}{a^3} = \frac{3V_1}{a^3r^2}\frac{d}{dr}r^4 = \frac{12V_1}{a^3}r = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &\Longrightarrow \rho\left(r\right) = \epsilon_0\frac{12V_1}{a^3}r\ [\mathrm{C.m}^{-3}]\ .\end{aligned}$$

   On peut vérifier la densité en calculant la charge totale :

$$\begin{aligned}Q &= \iiint \rho\left(r\right)d\mathscr{V} = 4\pi\int_0^a \rho(r)r^2dr = 4\pi\epsilon_0\frac{12V_1}{a^3}\int_0^a r^3dr = 4\pi\epsilon_0\frac{12V_1}{a^3}\frac{a^4}{4} \\ &= V_1 12\pi\epsilon_0 a\ [\mathrm{C}]\ .\end{aligned}$$

   d) Si l'on sait qu'il n'y a pas de charges dans la région $r \geq a$, donner l'expression du potentiel électrique, $V_{r\geq a}(r)$, dans la région $r \geq a$.
   Solution : Compte tenue de la théorème de Gauss sur une sphère à rayon $r > a$, on a

$$\oiint \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = 4\pi r^2E_r(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow \vec{\boldsymbol{E}}(r) = E_r(r)\vec{\boldsymbol{u}}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

   Le potentiel dans la région $r \geq a$ est donc :

$$V_{r\geq a}(r) = \int_{r\geq a}^{\infty}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r\geq a}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\ [\mathrm{V}]\ .$$

   e) Exprimer V_0 en fonction de a et Q (On prend $V(\infty) = 0$). (Indice : utiliser la continuité du potentiel électrique en $r = a$ et l'expression pour V_1 trouvé en (b)).
   Solution : Le résultat de 2(b) exprime V_1 en fonction de Q :

$$Q = V_1 12\pi\epsilon_0 a \Longrightarrow V_1 = \frac{Q}{12\pi\epsilon_0 a}$$

La continuité du potentiel à la surface de la sphère nous donne que :

$$V_{r\leq a}(a) = -V_1 + V_0 = V_{r\geq a}(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\Longrightarrow V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{12\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 a}\ [\mathrm{V}]\ .$$

Nous avons enfin le potentiel partout (pas demandé dans l'exercise):

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{12\pi\epsilon_0 a}\frac{r^3}{a^3} & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r \geq a \end{cases} .$$

Opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$\text{Formulaire :} \quad \overrightarrow{\mathbf{grad}} f\,(r,\theta,\phi) = \vec{\boldsymbol{u}}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{\boldsymbol{u}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{\boldsymbol{u}}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{A}}\,(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2 A_r\right]}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r}A_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\Delta f\,(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

3. (5pts) **Magnétostatique et Théorèmes d'Ampère** Considérons un conducteur rectiligne, supposé infini, parcouru pour un courant d'intensité I orientée le long de l'axe Oy.

   a) Trouver le champ $\vec{\boldsymbol{B}}(\rho,\phi,y)$ produit par ce courant en coordonnées cylindriques en faisant appel au théorème d'Ampère.

   Solution : Par la symétrie du problème, on a :

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\rho,\phi,y) = B_\phi\,(\rho)\,\vec{\boldsymbol{u}}_\phi$$

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}}(\rho,\phi,y)\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \oint B_\phi\,(\rho)\,\vec{\boldsymbol{u}}_\phi\cdot\vec{\boldsymbol{u}}_\phi \rho d\phi = \rho B_\phi\,(\rho)\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\rho B_\phi\,(\rho) = \mu_0 I\ ,$$

   ce qui nous donne;

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\rho,\phi,y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{\boldsymbol{u}}_\phi\ [\mathrm{T}]\ .$$

   b) Exprimer le champ $\vec{\boldsymbol{B}}(x,y,z)$ en coordonnées cartésiennes à n'importe quelle position $M=(x,y,0)$ dans le plan xOy.

   Solution : Dans le plan xOy, on a $\rho = |x|$, et $\vec{\boldsymbol{u}}_\phi = \frac{x}{|x|}\vec{\boldsymbol{u}}_z$, donc le champ $\vec{\boldsymbol{B}}$ dans le plan xOy:

$$\vec{\boldsymbol{B}}(x,y,z) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{\boldsymbol{u}}_z\ [\mathrm{T}]\ .$$

c) Trouver le flux $d\Phi$ du champ magnétique à travers une surface $dS = -dxdy\vec{\boldsymbol{u}}_z$ a des positions $x > 0$ et $x < 0$ respectivement. Est-ce que ce résultat dépend de la position y (Justifier votre réponse).

Solution :

$$d\Phi = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{\boldsymbol{u}}_z \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_z dxdy = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dxdy \; [\mathrm{T.m^2}] \; .$$

Le flux est positif pour $x > 0$ et negatif pour $x < 0$. Le flux $d\Phi$ ne dépend pas sur le coordonnée y.

d) Le fil de courant sur l'axe Oy est cylindrique, de rayon de a. On suppose la densité volumique de courant, $\vec{\boldsymbol{j}}$ (pour $\rho < a$) est homogène. Exprimer $\vec{\boldsymbol{j}}$ (fonction de a et I).

Solution :

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{\boldsymbol{u}}_y \; [\mathrm{A.m^{-2}}] \; .$$

e) Donner l'expression de $\vec{\boldsymbol{B}}(\rho)$ à l'intérieur du fil en fonction de ρ et I.

Solution : Par la symétrie du système, $\vec{\boldsymbol{B}}(\rho, \phi, z) = B_\phi(\rho)\vec{\boldsymbol{u}}_\phi$, même à l'intérieur du fil.

$$\oint_{\rho<a} \vec{\boldsymbol{B}}(\rho, \phi, y) \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = 2\pi\rho B_\phi(\rho) = \mu_0 I_{\mathrm{enl}} = \mu_0 \oiint \vec{\boldsymbol{j}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2 = \mu_0 I \frac{\rho^2}{a^2} \; ,$$

ce qui nous donne :

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho\vec{\boldsymbol{u}}_\phi \; [\mathrm{T}] \qquad \rho < a \; .$$

4. (5pts) **Force électromotrice :** On garde une ligne de courant sur l'axe Oy comme dans le problème précédent, et on ajoute un circuit rectangulaire portant un courant, i, dans le plan xOy (le courant i est produit par un générateur qui n'est pas illustré dans le schéma en fig.(2). Le circuit est rectangulaire, de largeur $2a$ en x et de longueur b en y. Le centre du cadre, C, est à la position $(x_0, 0, 0)$ avec x_0 arbitraire ($x_0 \in \{-\infty, \infty\}$). (Les gaines des fils empêchent le court-circuit quand $|x_0| < a$).

   a) Trouver la force de Laplace, $\vec{\boldsymbol{F}}_{L\to AB}$ sur le segment AB du cadre et $\vec{\boldsymbol{F}}_{L\to EF}$ sur le segment EF du cadre.

   Solution : Comme avec la question 3(b)

$$\vec{\boldsymbol{B}}(x, y, z) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{\boldsymbol{u}}_z \; [\mathrm{T}] \; .$$

   La force de Laplace sur les tiges AB and EF

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{L\to AB} = -\frac{\mu_0 i I b}{2\pi (x_0 - a)}\vec{\boldsymbol{u}}_x \; [\mathrm{N}] \quad , \quad \vec{\boldsymbol{F}}_{L\to EF} = \frac{\mu_0 i I b}{2\pi (x_0 + a)}\vec{\boldsymbol{u}}_x \; [\mathrm{N}] \; .$$

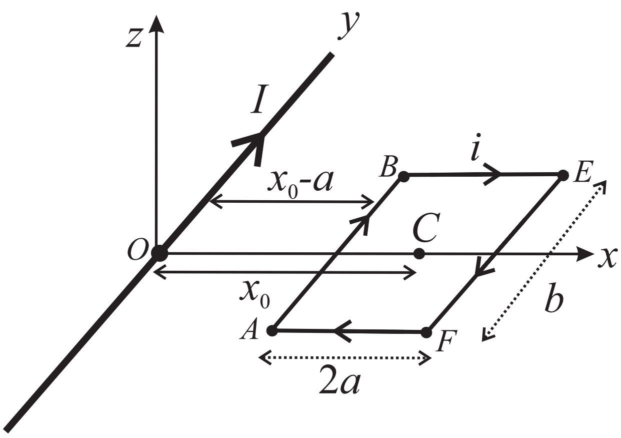


Figure 2: *Cadre rectangulaire à coté d'un fil de courant.*

b) Est-ce que les forces de Laplace sur les segments $\vec{F}_{L\to BE}$ et $\vec{F}_{L\to FA}$ sont nulles? Si l'on veut calculer la force de Laplace totale, $\vec{F}_{L,\text{tot}}$, sur le circuit. Est-ce qu'il faut calculer $\vec{F}_{L\to BE}$ et $\vec{F}_{L\to FA}$ et donner l'expression de $\vec{F}_{L,\text{tot}}$.

Solution : Les forces $\vec{F}_{L\to BE}$ et $\vec{F}_{L\to FA}$ ne sont pas nulles car $\vec{d\ell} = dx\,\vec{u}_y$ et $\vec{B} \propto \vec{u}_z$, sur ces cotés et donc $i\vec{d\ell} \wedge \vec{B} \propto \vec{u}_y \neq \vec{0}$. Pour autant, si l'on s'intéresse seulement à la force totale sur le cadre, il n'est pas nécessaire de les calculer car $\vec{F}_{L\to BE} = -\vec{F}_{L\to FA}$ et

$$\begin{aligned}\vec{F}_{L,\text{tot}} &= \vec{F}_{L\to AB} + \vec{F}_{L\to EF}\\ &= -\frac{\mu_0 i I b}{2\pi\,(x_0 - a)}\vec{u}_x + \frac{\mu_0 i I b}{2\pi\,(x_0 + a)}\vec{u}_x = -\frac{\mu_0 i I a b}{\pi\,(x_0^2 - a^2)}\vec{u}_x \text{ [N]}\,.\end{aligned}$$

c) Donner l'expression du moment dipolaire magnétique, $\vec{m}$, du cadre.

Solution :

$$\vec{m} = -2abi\,\vec{u}_z \text{ [Am}^2\text{]}\,.$$

d) Quelle est $\vec{F}_{L,\text{tot}}$ quand $x_0 = 0$? (On se rappel qu'un court circuit n'est pas permis). Expliquer votre résultat avec la règle de flux maximale.

Solution : On n'a que mettre $x_0 = 0$ dans l'expression de la force

$$\vec{F}_{L,\text{tot}} = \frac{\mu_0 i I b}{2\pi a}\vec{u}_x \text{ [N]}\,.$$

La force de Laplace sur le cadre est donc dans la direction de x positif (vers la droite das lafigure). Le cadre sera attiré vers des valeurs de x_0 positifs où le flux magnétique sera plus grande en accord avec le règle de flux maximal. (Ce n'est pas demandé, mais le point d'équilibre sera quand $x_0 = a$ car pour $x_0 > a$ la force est dans la direction $-\vec{u}_x$).

5. (5pts) **Induction :** On adopte de nouveau une ligne infinie de courant, I, et le même cadre conducteur comme dans la fig. (2) du problème précédent. Toutefois, il n'y a plus de générateur, et le courant, i, dans le circuit est produit par induction. Le circuit a une résistance électrique, R.

   a) Trouver l'expression pour le flux magnétique, Φ, à travers le circuit à une position arbitraire x_0 (avec $x_0 \neq |a|$).

   Solution : Comme avec la question 3(c)

$$d\Phi = \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{S}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx dy$$

   Le flux total est donc

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \oiint d\Phi = \oiint \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{S}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{x_0-a}^{x_0+a} \frac{dx}{x} \int_0^b dy \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \int_{x_0-a}^{x_0+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x_0+a}{x_0-a} \ [\mathrm{T.m^2}] \ .\end{aligned}$$

   b) On déplace le circuit en fonction du temps $x_0(t)$. Trouver l'expression de la force électromotrice, $e(t)$, dans le circuit en fonction de I, a, b, $x_0(t)$ et $v(t) = \frac{dx_0(t)}{dt}$.

   Solution :

$$\begin{aligned}e(t) &= -\frac{d}{dt}\Phi(t) = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi}\frac{d}{dt} \ln \frac{x_0+a}{x_0-a} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi}\left[\frac{1}{x_0(t)+a} - \frac{1}{x_0(t)-a}\right] v(t) \\ &= -\frac{\mu_0 I}{\pi} v(t) \left[\frac{ba}{x_0^2(t) - a^2}\right] \ [\mathrm{V}] \ .\end{aligned}$$

   c) Donner l'expression du courant induit, $i(t)$, dans le cadre.

   Solution :

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{v(t)}{R}\left[\frac{ba}{x_0^2(t) - a^2}\right] \ [\mathrm{A}] \ .$$

   d) Donner l'expression de la puissance dissipée dans la résistance, R, du cadre, $P_J(t)$.

   Solution :

$$P_J(t) = i^2(t) R = \frac{\mu_0^2 I^2}{\pi^2}\frac{v^2(t)}{R}\left[\frac{ba}{x_0^2(t) - a^2}\right]^2 \ [\mathrm{W}] \ .$$